Tilburg University

Nash-evenwichten voor tweepersoonsspelen

Tijs, S.H.

Published in:
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde

Publication date:
1978

Link to publication in Tilburg University Research Portal

Citation for published version (APA):
Tijs, S. H. (1978). Nash-evenwichten voor tweepersoonsspelen. *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, *65*, 235-241.

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Download date: 06. May. 2023

Nash-evenwichten voor tweepersoonsspelen

Dr S.H. TIJS

1. Inleiding

Speltheoretici houden zich bezig met het ontwerpen en het bestuderen van mathematische modellen voor beslissingssituaties waarbij meerdere beslissers (spelers) met uiteenlopende doelstellingen betrokken zijn.
In dit artikel zullen we onze aandacht concentreren op slechts een van de vele klassen van spelen en wel die van de niet-coöperatieve tweepersoonsspelen in normale vorm, in de hoop dat de lezer ondanks deze beperking toch een indruk krijgt van het type problemen, van de gebruikte wiskundige hulpmiddelen bij de aanpak van die problemen en van de plaats en de toepassingsmogelijkheden van het vakgebied dat speltheorie heet.
Voor een meer uitgebreide kennismaking met het vak verwijzen we naar de werken [3], [4], [6], [12], [14], [15] en [18].

2. Tweepersoonsspelen in normale vorm

We beginnen met enkele

Definities

Een *tweepersoonsspel* (*in normale vorm*) is een geordend viertal $\langle X, Y, K_1, K_2\rangle$ waarbij X en Y niet-lege verzamelingen zijn en waarbij $K_1 : X \times Y \to \mathrm{IR}$ en $K_2 : X \times Y \to \mathrm{IR}$ reële functies op $X \times Y$ zijn. X, Y, K_1 en K_2 heten achtereenvolgens: (*zuivere*) *strategieënruimte van speler* I, (*zuivere*) *strategieënruimte van speler* II, *uitbetalingsfunctie van speler* I en *uitbetalingsfunctie van speler* II. De elementen van X (resp. Y) noemen we (*zuivere*) *strategieën* van speler I (resp. II). We spreken van een *nulsomspel* als $K_1 + K_2 = 0$. In dat geval geven we het spel ook wel aan met het geordende drietal $\langle X, Y, K\rangle$ waarbij $K := K_1 = -K_2$. Als X en Y beide eindig veel elementen bevatten, dan spreken we van een *eindig spel*, anders van een *oneindig* spel.

Een partijtje van zo'n spel $\langle X, Y, K_1, K_2\rangle$ verloopt als volgt: twee spelers, I en II genaamd, kiezen onafhankelijk van elkaar een element x resp. y uit de verzameling X resp. Y. Daarna volgt een uitbetaling $K_1(x, y)$ aan speler I en een uitbetaling $K_2(x, y)$ aan speler II.
Merk op, dat in een nulsomspel de verrekening na een partijtje tussen de spelers onderling plaats vindt.
Het is een interessant feit dat in principe de meeste gezelschapsspelen kunnen worden gereduceerd tot spelen in normale vorm; hierop gaan we hier niet in, maar we verwijzen naar K u h n [7].

Voorbeeld 1 (*Duopolymodel van C o u r n o t*)

Veronderstel dat een bepaald produkt geproduceerd wordt door twee producenten

I en II die opvolgend de produktiecapaciteit $c_1 > 0$ en $c_2 > 0$ hebben. Als I besluit per tijdseenheid een hoeveelheid $x \in [0, c_1]$ te produceren en op de markt te brengen en als II besluit een hoeveelheid $y \in [0, c_2]$ per tijdseenheid aan te bieden, dan brengt het produkt een prijs $p(x + y) \geqslant 0$ per eenheid produkt op. Veronderstel dat bij een produktie x (resp. y) door I (resp. II) de produktiekosten $k_1(x) \geqslant 0$ (resp. $k_2(y) \geqslant 0$) bedragen. Dan laat deze marktsituatie zich omzetten in het oneindige tweepersoonsspel $\langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ waarbij $X = [0, c_1]$, $Y = [0, c_2]$ en

$$K_1(x, y) = x\,p(x + y) - k_1(x), \quad K_2(x, y) = y\,p(x + y) - k_2(y)$$

voor elke $(x, y) \in X \times Y$.

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,\ j=1}^{m\quad n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,\ j=1}^{m\quad n}$ twee $m \times n$-matrices ($m, n \in \mathbb{N}$) van reële getallen zijn. Dan noemen we het tweepersoonsspel

$\langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ met $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ en

$K_1(i, j) = a_{ij}$, $K_2(i, j) = b_{ij}$ voor alle $(i, j) \in X \times Y$,

het (*eindige*) *bimatrixspel* met uitbetalingsmatrices A *en* B; we geven dit spel aan met (A, B).

Als $B = -A$ dan spreken we van een (*eindig*) *matrixspel* (met uitbetalingsmatrix) A.

Het is duidelijk dat elk eindig tweepersoonsspel $\langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ kan worden opgevat als een eindig bimatrixspel door de elementen van X en Y te nummeren. Verder corresponderen eindige nulsomspelen met matrixspelen.

Voorbeeld 2 (*Een reclamecampagnemodel*)

Twee producenten I en II van hetzelfde produkt, die niet mogen samenwerken, beheersen op zeker tijdstip ieder de helft van de markt, wat voor ieder 8 eenheden per kwartaal opbrengt. Veronderstel dat beide producenten onafhankelijk van elkaar moeten beslissen om óf een reclamecampagne te beginnen welke twee eenheden kost (noem deze beslissing R) óf geen reclame te maken (noem deze beslissing GR). Veronderstel verder dat het marktaandeel in het dan volgende kwartaal (verder kijken we niet) gelijk blijft als beide of geen van beide reclame maken en dat in de andere gevallen degene die reclame maakt 75% van de markt krijgt in het volgende kwartaal. Dan is deze situatie op te vatten als een bimatrixspel (A, B) waarbij

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} GR & R \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} GR \\ R \end{array} \end{array}, \quad B = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} GR & R \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} GR \\ R \end{array} \end{array}$$

ook wel verkort weer te geven door $(A, B) = \begin{bmatrix} (8, 8) & (4, 10) \\ (10, 4) & (6, 6) \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 3 (*Een verberg-en-zoek-spel*)

We bekijken het volgende tweepersoonsnulsomspel. Er zijn drie kamers 1, 2 en 3. In een partij verbergt speler II zich in één van die kamers. Vervolgens zoekt speler I net zo lang totdat hij speler II gevonden heeft. Elke keer dat hij tevergeefs in de kamer kijkt moet hij *f* 1,– aan speler II betalen.
De strategieën van speler II kunnen we identificeren met de getallen 1, 2 en 3; die van speler I met de 3! permutaties van 1, 2 en 3 als we afspreken dat we met de permutatie (i_1, i_2, i_3) bedoelen: kijk eerst in kamer i_1, dan zo nodig in i_2 en vervolgens zo nodig in i_3. Dit verberg-en-zoek-spel kan nu worden geïdentificeerd met het 6×3-matrixspel

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} (1\ 2\ 3) \\ (1\ 3\ 2) \\ (2\ 1\ 3) \\ (2\ 3\ 1) \\ (3\ 1\ 2) \\ (3\ 2\ 1) \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Definitie

Laat $A = [a_{ij}]_{i=1,}^{m}\,_{j=1}^{n}$, $B = [b_{ij}]_{i=1,}^{m}\,_{j=1}^{n}$ twee $m \times n$-matrices van reële getallen zijn ($m, n \in \mathbb{N}$). Dan heet het (oneindige) tweepersoonsspel $\langle S^m, S^n, E_A, E_B \rangle$, waarbij

$$\begin{aligned} S^m &:= \{p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^m; p \geqslant 0, \Sigma_{i=1}^m p_i = 1\} \\ S^n &:= \{q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n; q \geqslant 0, \Sigma_{j=1}^n q_j = 1\}, \\ E_A(p, q) &:= \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n p_i a_{ij} q_j = p\,A\,q^t \quad \text{en} \\ E_B(p, q) &:= p\,B\,q^t \ (p \in S^m, q \in S^n), \end{aligned}$$

de *gemengde uitbreiding van het bimatrixspel* (A, B).
De elementen van S^m (resp. S^n) noemen we *gemengde strategieën van speler* I (resp. speler II).

Een gemengde strategie $(p_1, \ldots, p_m) \in S^m$ kan gerealiseerd worden door een kansmechanisme te gebruiken dat uit de zuivere strategieënruimte $\{1, 2, \ldots, m\}$ van speler I een element kiest en wel zo dat (rij) i gekozen wordt met kans p_i. Als in een partij speler I de gemengde strategie p gebruikt en speler II (onafhankelijk daarvan) de gemengde strategie q, dan kan men $E_A(p, q)$ en $E_B(p, q)$ interpreteren als verwachte uitbetalingen aan speler I en speler II. Merk op dat we zonder bezwaar de zuivere strategie $i \in \{1, \ldots, m\}$ van speler I kunnen identificeren met de gemengde strategie $e_i \in S^m$ en dit verklaart de term 'uitbreiding' (e_i is de i-de standaardbasisvector in $\mathbb{R}^m$).

3. Nash-evenwichten

In de niet-coöperatieve speltheorie speelt het begrip Nash-evenwicht een centrale rol.

Definitie

Zij $\langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ een tweepersoonsspel. Een punt $(x^*, y^*) \in X \times Y$, waarvoor

$$K_1(x^*, y^*) = \max_{x \in X} K_1(x, y^*),\ K_2(x^*, y^*) = \max_{y \in Y} K_2(x^*, y)$$

noemen we een *Nash-evenwicht* of een *evenwichtspunt* van het spel.

Voorbeelden

4. Voor het 2×2-bimatrixspel uit voorbeeld 2 is $(R, R) \in \{GR, R\} \times \{GR, R\}$ het enige evenwichtspunt.
5. Het bimatrixspel $\begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (2,1) \end{bmatrix}$ bezit twee Nash-evenwichten.
6. Het bimatrixspel $(A, -A)$ waarbij A de 6×3-matrix uit voorbeeld 3 is, bezit geen evenwichtspunten.

In z.g. *evenwichtspuntstellingen* worden voorwaarden aan strategieënruimten en uitbetalingsfuncties opgelegd, welke voldoende zijn om de existentie van evenwichtspunten te garanderen. De eerste evenwichtspuntstelling is afkomstig van J. F. N a s h [9, 10] en luidt als volgt.

Stelling:

Voor elk eindig bimatrixspel bezit de gemengde uitbreiding tenminste één evenwichtspunt.

N a s h gaf in [10] een bewijs waarbij hij gebruik maakte van de dekpuntstelling van B r o u w e r. In zijn artikel [9] bewees hij zijn evenwichtspuntstelling m.b.v. een dekpuntstelling van K a k u t a n i voor multifuncties. Hierbij werd gebruik gemaakt van het feit, dat de evenwichtspunten van het spel $\langle X, Y, K_1, K_2 \rangle$ precies de dekpunten zijn van de multifunctie

$$(x, y) \to B_1(y) \times B_2(x)$$

op $X \times Y$ waarbij

$$B_1(y) := \{x^* \in X; K_1(x^*, y) = \max_{x \in X} K_1(x, y)\},$$
$$B_2(x) := \{y^* \in Y; K_2(x, y^*) = \max_{y \in Y} K_2(x, y)\}.$$

Ook bij de evenwichtspuntstellingen van G l i c k s b e r g [5], N i k a i d o - I s o d a [13], P o n s t e i n [16] en B r o w d e r [2] spelen dekpuntstellingen een rol.
Onder zekere voorwaarden voor p_1, p_2 en k kan men bewijzen, dat het spel uit voorbeeld 1 een uniek evenwichtspunt bezit; zie hiervoor bijv. P a r t h a s a r a t h y - R a g h a v a n [15], blz. 157.

Laten we nu kijken naar de deelklasse van tweepersoonsnulsomspelen. Een evenwichtspunt (x^*, y^*) voor zo'n spel $<X, Y, K>$ heet ook wel *zadelpunt* omdat de volgende 'zadelpuntsconditie' geldt:

$$K(x, y^*) \leqslant K(x^*, y^*) \leqslant K(x^*, y) \text{ voor alle } x \in X \text{ en alle } y \in Y.$$

Uit de stelling van J. F. Nash volgt dat de gemengde uitbreiding van elk eindig matrixspel tenminste één zadelpunt bezit. Dit resultaat werd voor het eerst bewezen door John von Neumann in het artikel [11], dat de grondslag voor de speltheorie legde. Het staat bekend als de hoofdstelling van de matrixspeltheorie of ook wel als minimaxstelling om een reden die duidelijk wordt in de volgende

Stelling

Zij $<X, Y, K>$ een nulsomspel. Dan zijn de volgende drie uitspraken equivalent.

(i) $\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y)$ en $\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)$ bestaan en zijn aan elkaar gelijk

(ii) Er zijn $v \in \mathbb{R}$, $x^* \in X$ en $y^* \in Y$ zo, dat

$$K(x^*, y) \geqslant v \text{ voor elke } y \in Y \text{ en } K(x, y^*) \leqslant v \text{ voor elke } x \in X$$

(iii) $<X, Y, K>$ bezit tenminste één zadelpunt.

[Als voor een nulsomspel de uitspraak (ii) geldt, dan noemen we v *de waarde van het spel* en x^* (resp. y^*) een *optimale strategie* voor speler I (resp. speler II).]

In z.g. *minimaxstellingen* worden voorwaarden aan de strategieënruimten X en Y en aan de uitbetalingsfunctie K opgelegd, welke moeten garanderen dat de benedenwaarde

$$\underline{v}(X, Y, K) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y)$$

van het nulsomspel $<X, Y, K>$ gelijk is aan de bovenwaarde

$$\bar{v}(X, Y, K) := \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Sinds 1928 zijn verschillende minimaxstellingen afgeleid. Voor een overzicht zie [15], Ch. 5 en [18], blz. 23. De opgelegde voorwaarden zijn i.h.a. zwakker dan die in evenwichtspuntstellingen terwijl ook andere hulpmiddelen dan dekpuntstellingen (zoals scheidingsstellingen voor convexe verzamelingen) bij de bewijzen een rol kunnen spelen.

Het gelijk-zijn van beneden- en bovenwaarde is iets zwakker dan de existentie van evenwichtspunten zoals we zien in de volgende

Stelling

Zij $<X, Y, K_1, K_2>$ een nulsomspel. Dan zijn equivalent:

(i) de benedenwaarde is gelijk aan de bovenwaarde

(ii) voor elke $\epsilon > 0$ is er een $(x^*, y^*) \in X \times Y$, zo, dat

$$(*) \quad K_1(x^*, y^*) \geqslant \sup_{x \in X} K_1(x, y^*) - \epsilon, K_2(x^*, y) \geqslant \sup_{y \in Y} K_2(x^*, y) - \epsilon.$$

Een punt $(x^*, y^*) \in X \times Y$ voor een tweepersoonsspel $<X, Y, K_1, K_2>$ dat aan $(*)$ voldoet noemen we een *ϵ-evenwichtspunt.*
Uit bovenstaande stelling volgt dat het afleiden van ϵ-evenwichtspuntstellingen – dat zijn stellingen waarin men zich bezighoudt met de existentie van ϵ-evenwichtspunten voor elke $\epsilon > 0$ – een natuurlijke uitbreiding is van het afleiden van minimaxstellingen.
Voor ϵ-evenwichtspuntstellingen verwijzen we naar [1], [17], [18] Ch. 4 en [19].

4. Slotopmerkingen

In de vorige paragraaf is vooral de existentie van (ϵ-)evenwichtspunten (voor elke $\epsilon > 0$) van tweepersoonsspelen aan de orde geweest, terwijl men nog vele andere interessante vragen kan stellen zijn, zoals:

V1. Hoe kunnen we evenwichtspunten berekenen?
V2. Is er iets te zeggen over de structuur van de evenwichtspuntverzamelingen?
V3. Wat gebeurt er met de evenwichtspuntverzameling als we de uitbetalingsfuncties storen?
V4. Zijn er 'uitverkoren' evenwichtspunten als een spel meer dan één evenwichtspunt bezit?
V5. Hoe gemengde uitbreidingen te definiëren voor oneindige spelen? Zijn er dan weer (ϵ-)evenwichtspunten?
V6. Hoe is de situatie voor spelen in normale vorm met meer dan twee personen?

Op de meeste van die vragen zijn (nog) geen definitieve antwoorden gegeven. Vaak is er wel veel bekend over de deelklasse van de nulsomspelen (zie [6] en [18]) en deze werkt dan als inspiratiebron bij de verdere uitbouw van de theorie. Ook is er een vruchtbare wisselwerking met de mathematische programmeringstheorie (zie [6], [8], [20] en [21]). Toepassingen van de speltheorie vindt men onder meer in de mathematische economie, operations research, statistiek, psychologie en krijgskunde.

5. Literatuur

[1] BLOEMBERG, B., *Evenwichtspuntstellingen voor spelen op vierkanten en stroken*, scriptie Math. Inst. K.U., Nijmegen (1977).

[2] BROWDER, F.E., *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. 177, 283-301 (1968).

[3] BURGER, E., *Einführung in die Theorie der Spiele*, Walter de Gruyter & Co, Berlin (2. Auflage, 1966).

[4] EKELAND, I., *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*, Presses Universitaires de France (1974).

[5] GLICKSBERG, I.L., *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points*, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 170-174 (1952).

[6] KARLIN, S., *Matrix games, programming and mathematical economics*, Reading, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc. (1959).

[7] KUHN, H.W., *Extensive games and the problem of information*, Annals of Mathematics Studies **28**, 193-216 (1953).

[8] LÜTHI, H.J., *Komplementaritäts- und Fixpunktalgorithmen in der mathematischen Programmierung, Spieltheorie und Ökonomie*, Springer, Berlin (1976).

[9] NASH, J.F., *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36**, 48-49 (1950).

[10] NASH, J.F., *Non-cooperative games*, Ann. of Math. **54**, 286-295 (1951).

[11] NEUMANN, J. von, *Zur Theorie der Gesellschafsspiele*, Math. Ann. **100**, 295-320 (1928).

[12] NEUMANN, J. von, and O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press (1944).

[13] NIKAIDÔ, H. and K. ISODA, *Note on non-cooperative convex games*, Pacific J. Math. **5**, 807-815 (1955).

[14] OWEN, G., *Game Theory*, Philadelphia, W.B. Saunders Comp. (1968).

[15] PARTHASARATHY, T. and T.E.S. RAGHAVAN, *Some topics in two-person games*, New York, American Elsevier Publ. Comp. (1971).

[16] PONSTEIN, J., *Existence of equilibrium points in non-product spaces*, J. SIAM Appl. Math., **14**, 181-190 (1966).

[17] RUPP, W., *ϵ-Gleichgewichtspunkte in n-Personenspielen*, in R. Henn, O. Moeschlin (Ed): Mathematical Economics and Game Theory; Essays in Honor of Oskar Morgenstern, Springer, Berlin, 128-138 (1977).

[18] TIJS, S.H., *Semi-infinite and infinite matrix games and bimatrix games*, proefschrift K.U. Nijmegen (1975).

[19] TIJS, S.H., *ϵ-Equilibrium point theorems for two-person games*, Rapport 7629, Math. Inst. K.U. Nijmegen (1976).

[20] TIJS, S.H., *Semi-infinite linear programs and semi-infinite matrix games*, Rapport 7630, Math. Inst. K.U. Nijmegen (1976).

[21] TIJS, S.H., *Spelen in uitgebreide en normale vorm en mathematisch programmeren*, rapport BC 20/77, Math. Centrum, Amsterdam (1977).